

1. Ναδειχθεί ότι ο

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

είναι αντιστρέψιμος και να γραφεί ο A^{-1} σαν γραμμικός συνδιασμός των A και I .

2. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) \in \mathbb{R}[x]$ και τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Ο A λέγεται συνεδύων πίνακας του πολυωνύμου. Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το $f(x)$.

3. Έστω $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^2 + I = 0$. Να υπολογίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο του A και να δείξετε ότι ο A δεν διαγωνοποιείται.
4. Έστω $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^2 = I$. Τι γνωρίζετε για το ελάχιστο πολυώνυμο του A και τι για το χαρακτηριστικό; Ο A είναι διαγώνιος; Ο A διαγωνοποιείται;
5. Έστω $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ και k φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του n . Δείξτε ότι αν $A^k = 0$ τότε $A^n = 0$.

6. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(α') Να βρεθεί το k ώστε το ελάχιστο πολυώνυμο του A να μην έχει βαθμό τρία.

(β') Για τη συγκεκριμένη τιμή του k να εξετάσετε αν ο A^m διαγωνοποιείται και να βρεθεί ο A^{-1} με τη χρήση του ελαχίστου πολυωνύμου. $m \in \mathbb{N}$.

7. Βρείτε τον πίνακα e^A , όπου A είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$.